МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

Факультет информационных технологий

Доманова Е. Д.

Предел и непрерывность функций одной переменной

учебно-методическое пособие

Новосибирск
2013

Учебно-методическое пособие содержит теоретические сведения по теме «Предел и непрерывность функций одной переменной», которые сопровождаются примерами, упражнениями и комментариями, призванными сформировать верное представление о сути изучаемых понятий.

Понятия предельного перехода и непрерывности пронизывают насквозь весь курс математического анализа. Однако их освоение вызывает определенные трудности у студентов. Поэтому одна из целей данного пособия — на основе системы упражнений и примеров развить математическую интуицию и логическое мышление читателей, содействовать воспитанию общематематической культуры. Особое внимание в пособии уделяется рассмотрению глобальных свойств непрерывных функций, поскольку их использование при решении прикладных задач является зачастую важнейшим, но неосознаваемым моментом.

Пособие состоит из трех глав и приложения. В приложении представлены вопросы коллоквиума и образец контрольной работы по теме.

Целевая аудитория: студенты 1 курса ФИТ.

Разработка является оригинальной и соответствует программе базового курса математического анализа для студентов ФИТ НГУ.

Автор Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Глава 1

Предел функции в конечной точке и на бесконечности

Математический анализ как особый раздел математики сформировался благодаря развитию понятий переменной величины и функциональной зависимости. Основным инструментом исследования функций и построения новых объектов, выделяющим математический анализ из ряда других математических дисциплин, является операция предельного перехода.

Одним из важнейших свойств функции, которое до некоторых пор считалось естественным и само собой разумеющимся, является ее непрерывность. Попытки корректно определить понятие непрерывной функции, осознание и решение возникавших при этом проблем, оказали решающее влияние на развитие математического анализа.

Рассмотрению вопросов, связанных с понятиями предела и непрерывности функции, и посвящено данное методическое пособие. Но прежде, чем заняться изучением этих понятий, познакомимся с языком, на котором эти понятия формулируются.

1.1. Окрестности

Понятие окрестности точки a отражает наше представление о том, какие точки можно считать близкими к a, и в дальнейшем позволит определить, что значит приближаться, стремиться к точке a.

Определение. *Элементарной окрестностью* (ε–окрестностью) точки $a \in R$ называется множество $U_\varepsilon(a)$ точек, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

Понятно, что элементарная окрестность $U_\varepsilon(a)$ представляет собой множество точек вещественной прямой, удаленных от точки a на расстояние, меньшее чем ε, то есть является аналогом круга на плоскости или шара в трехмерном пространстве. Поэтому точка a называется центром, а число ε — радиусом элементарной окрестности.

Раскрыв модуль в неравенстве $|x - a| < \varepsilon$, легко увидеть, что элементарная окрестность $U_\varepsilon(a)$ — это интервал вида $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

В более широком смысле окрестностью $U(a)$ точки a называется любое множество, содержащее какую-нибудь элементарную окрестность точки a.

Упражнение. Покажите, что интервал $(a; b)$ является окрестностью каждой своей точки.

Понятно, что любая элементарная окрестность точки a содержит элементарную окрестность меньшего радиуса. Таким образом, элементарные окрестности точки a образуют систему вложенных друг в друга интервалов. Причем единственной общей точкой всех этих множеств является точка a.

Если рассмотреть множество всех окрестностей фиксированной точки a, то системы вложенных множеств мы уже не увидим, однако пересечение любых двух окрестностей точки a является окрестностью точки a и содержит некоторую элементарную окрестность точки a.

Напомним, что следствием аксиомы полноты множества вещественных чисел является теорема о вложенных отрезках, которая утверждает, что пересечение системы вложенных отрезков всегда непусто.

Упражнение. Приведите пример системы вложенных интервалов, пересечение которых пусто. Может ли пересечением системы вложенных интервалов быть множество из двух точек?

Из аксиомы полноты следует, что для двух различных точек a и b существует число c, которое их разделяет. Следовательно, у двух различных точек вещественной прямой найдутся непересекающиеся окрестности. Например, интервалы $(-0,5; 0,5)$ и $(0,5; 1,5)$ — непересекающиеся окрестности точек 0 и 1 соответственно. Можно выбрать и другую пару непересекающихся окрестностей, например, $(-0,2; 0,3)$ и $(0,6; 1,1)$.

Упражнение. Укажите непересекающиеся окрестности для точек 0 и $\sqrt{2}$, для точек -1 и $\sqrt{2}$, для точек a и b $(a \neq b)$.

Упражнение. Докажите еще одно важное свойство: если $b \neq a$ и $b \in U_\varepsilon(a)$, то найдется число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$.

Проколотой окрестностью точки a называется множество $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$. Проколотую окрестность будем обозначать $\mathring{U}_\varepsilon(a)$

1.2. Классификация точек множества

Вспомним еще несколько **определений**.

Пусть M — некоторое множество вещественных чисел. Точка a называется *точкой прикосновения* множества M, если в любой окрестности точки a содержится какая-либо точка из множества M.

Точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества M, если в некоторой ее окрестности нет других точек множества M, кроме самой точки a.

Точка a называется *предельной* точкой множества M, если в любой ее проколотой окрестности содержится хотя бы одна точка множества M. Нетрудно видеть, что тогда в любой окрестности точки a содержится бесконечно много точек множества M.

Подчеркнем, что в определении не требуется, чтобы сама предельная точка принадлежала множеству M.

Упражнение. Докажите, что a является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда из множества M можно выбрать последовательность a_n, сходящуюся к точке a, причем $a_n \neq a$.

Как мы помним, теорема Больцано–Вейерштрасса утверждает, что у любого бесконечного (по мощности) ограниченного множества вещественных чисел есть хотя бы одна предельная точка (которая может и не принадлежать этому множеству).

Упражнение. Докажите, что любая точка множества M является либо его предельной точкой, либо изолированной.

Упражнение. Докажите, что любая точка прикосновения множества M является либо предельной точкой множества M, либо изолированной.

Точка a называется *внутренней* точкой множества M, если найдется окрестность точки a, которая целиком погружена в множество M.

Точка a называется *граничной* точкой множества M, если в любой ее окрестности содержится как точка множества M, так и точка, не принадлежащая M.

Упражнение. Докажите, что изолированная точка всегда является граничной точкой множества M. Любая граничная точка множества M является либо предельной, либо изолированной.

Упражнение. Дайте классификацию точек множества $(0;1] \cup \{2\}$.

1.3. Открытые и замкнутые множества

Определение. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Учитывая установленные выше связи между различными типами точек, можно переформулировать это определение:

1) множество является замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки,

2) множество является замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние, то есть каждая точка множества погружена в него вместе с некоторой своей окрестностью.

Упражнение. Покажите, что отрезок $[a;b]$ является замкнутым множеством, а интервал $(a;b)$ — открытым. Является ли множество $(0;1] \cup \{2\}$ открытым или замкнутым?

Свойства замкнутых множеств.

1. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

2. Пересечение любой совокупности (не обязательно конечной) замкнутых множеств замкнуто.

Свойства открытых множеств.

1. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

2. Объединение любой совокупности (не обязательно конечной) открытых множеств открыто.

Упражнение. Запишите множество M в виде одного интервала или отрезка (ответ обоснуйте):

$$1)\ M=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}] \qquad 2)\ M=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{n+1}{n};\frac{n+1}{n})$$

Противоречат ли полученные результаты сформулированным выше свойствам открытых и замкнутых множеств?

Между открытыми и замкнутыми множествами существует простая связь: дополнение к открытому множеству замкнуто, а дополнение к замкнутому множеству открыто (имеется в виду дополнение до множества всех вещественных чисел).

Есть только два множества, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми — это пустое множество и вся вещественная прямая.

1.4. Предел функции

Дадим определение очень важного понятия, которое формализует наши представления о процессе стабилизации, приближения, стремления значений функции к какому-либо значению.

Будем считать, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, возможно, самой точки a, то есть в проколотой окрестности точки a.

Определение. Число $A \in R$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \bigm| (0<|x-a|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-A|<\varepsilon)$.

Можно переформулировать это определение на языке окрестностей: $\forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(a) \bigm| (x\in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (f(x)\in U_\varepsilon(A))$.

Подчеркнем: $x\neq a$, поскольку в точке a значение функции $f(x)$ может быть не определено. Более того, зачастую это значение действительно не определено и нас интересует именно вопрос о том, к какому числу приближаются значения функции $f(x)$, когда x приближается к a.

Тот факт, что число A является пределом $f(x)$, обозначают следующим образом: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или просто пишут, что $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Можно говорить о пределе функции $f(x)$ в точке a даже тогда, когда функция определена не в полной окрестности этой точки, а на каком-то множестве M, для которого точка a является предельной. Например, это может быть правая или левая полуокрестность точки, то есть множества $a < x < a+\delta$ или $a-\delta < x < a$. В таком случае говорят о пределе справа или пределе слева и пишут $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Упражнение. Дайте определения $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ на языке неравенств.

Аналогично, если $f(x) \to A$ при $x \to a$, и при этом значения $f(x)$ меньше (больше) значения A, то можно сказать, что $f(x)$ стремится к значению A снизу (сверху). Это связано с тем, что на графиках мы ось значений располагаем вертикально.

Бесконечные пределы

При формулировке и доказательстве многих утверждений, связанных с неограниченным возрастанием или убыванием функции, нам удобно говорить о расширенной числовой прямой $\overline{R}$, которая наряду с «обычными» числами содержит символы бесконечности ∞ или $\pm\infty$. Линейный порядок распространим на эти символы естественным образом: для любого значения $a \in R$ будем считать выполненными неравенства $-\infty < a < +\infty$ и $|a| < \infty$.

С введением этих символов определения некоторых понятий и даже доказательства некоторых теорем становятся единообразными для конечного числа a и для случая бесконечности.

Определение. *Элементарной окрестностью бесконечно удаленной точки* $U_K(\infty)$, $K > 0$, называется множество точек, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$. *Правой элементарной окрестностью бесконечно удаленной точки* $U_K(+\infty)$ называется луч $x > K$. *Левой элементарной окрестностью бесконечно удаленной точки* $U_K(-\infty)$ называется луч $x < K$.

Правую и левую окрестности бесконечно удаленной точки иногда называют окрестностью «плюс бесконечности» и соответственно «минус бесконечности». Так же как и для конечной точки, слово «элементарная» мы будем опускать, если нет необходимости это подчеркивать.

По аналогии с определением конечного предела можно дать определения бесконечных пределов, заменяя окрестность $U_\varepsilon(A)$ на $U_K(\infty)$, $U_K(+\infty)$ или $U_K(-\infty)$.

Упражнение. Сформулируйте на языке неравенств определения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, так же как мы это сделали для конечного предела.

Решение. В определении бесконечного предела

$$\forall U_K(\infty)\ \exists U_\delta(a) \bigm| (x \in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (f(x) \in U_K(\infty))$$

расшифруем, как выглядит $U_K(\infty)$ и что значит $f(x) \in U_K(\infty)$. Получим следующее определение: $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, если

$$\forall K > 0\ \exists \delta > 0 \bigm| (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| > K).$$

Аналогично получаются еще два определения, которые отличаются только направлением луча, являющегося окрестностью:

$f(x) \to -\infty$, если $\forall K\ \exists \delta > 0 \bigm| (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (f(x) < K)$

$f(x) \to +\infty$, если $\forall K\ \exists\delta > 0 \mid (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (f(x) > K)$

Знак числа K мы не указываем, поскольку это число обозначает начало луча, и, вообще говоря, знак его может быть любым. Однако надо понимать, что если нас интересует предел $-\infty$, то мы «вкладываем» окрестности друг в друга, уменьшая K, и поэтому не будет ошибкой написать $K < 0$. Для предела $+\infty$ соответственно можно писать $K > 0$.

Вы уже заметили, что определения предела функции (конечного или бесконечного) имеют одинаковую структуру. Если перейти с «языка неравенств» на «язык окрестностей», все эти определения можно записать следующим образом:

$A \in \overline{R}$ называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ $(a \in \overline{R})$, если

$$\forall U(A)\ \exists U(a) \mid (x \in \mathring{U}(a)) \Rightarrow (f(x) \in U(A)).$$

Упражнение. Дайте определения $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, где $A \in R$, на языке неравенств.

Упражнение. Докажите единственность предела функции в точке $a \in \overline{R}$ (конечного или бесконечного).

Решение. Предположим, что функция $f(x)$ имеет два различных предела в точке $a \in \overline{R}$. Обозначим их A_1 и A_2.

Поскольку $A_1 \neq A_2$, у этих точек найдутся непересекающиеся окрестности $U(A_1)$ и $U(A_2)$. По определению предела для них найдутся окрестности $U_1(a)$ и $U_2(a)$ такие, что $(x \in \mathring{U}_1(a)) \Rightarrow (f(x) \in U(A_1))$ и $(x \in \mathring{U}_2(a)) \Rightarrow (f(x) \in U(A_2))$.

Пересечение окрестностей $U_1(a)$ и $U_2(a)$ также является окрестностью точки a. Назовем ее $U_0(a)$. Тогда получается, что для любого x из $\mathring{U}_0(a)$ одновременно выполнены два взаимоисключающих условия:

$f(x) \in U(A_1)$ и $f(x) \in U(A_2)$.

Это противоречие и доказывает невозможность существования двух различных пределов.

1.5. Предельный переход и неравенства

Начнем изучение вопроса с нескольких простых примеров.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. В любой проколотой окрестности точки $x = 0$ она принимает строго положительные значения. Можно ли на этом основании утверждать, что ее предел при $x \to 0$ также будет положительным? Докажите по определению, что ее предел в точке $x = 0$ равен нулю.

Как видим, из неравенства $f(x) > 0$ на $\mathring{U}(0)$ не следует неравенство $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 0$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Ее предел в точке $x = 0$ равен нулю. Но в отличие от предыдущего примера, в любой проколотой окрестности точки $x = 0$ функция $f(x) = x^3$ принимает и положительные, и отрицательные значения.

Однако, если рассмотреть ту же функцию вблизи точки $x = 1$, где ее предел равен 1, то мы легко найдем такую окрестность этой точки, в которой функция принимает строго положительные значения. Например, при $x \in (0,5; 1,5)$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1 < 0$, и у точки $x = -1$ найдется такая окрестность, в которой функция также принимает строго отрицательные значения.

Возникает вопрос: существует ли связь между знаком функции в некоторой окрестности точки и знаком предела функции в этой точке? Ответом на этот вопрос служат следующие утверждения.

Лемма о сохранении знака. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в точке a конечный предел A, отличный о нуля. Тогда существует окрестность точки a, в которой функция принимает значения того же знака, что и число A.

Упражнение. Докажите это утверждение. Выясните, имеет ли место подобное утверждение, если $f(x)$ имеет в точке a бесконечный предел $+\infty$ или $-\infty$.

Обобщением леммы о сохранении знака является

Лемма о локальной ограниченности. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в точке a конечный предел A. Тогда для любого числа $B < A$ существует окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $B < f(x)$.

Доказательство леммы получается непосредственно, если вспомнить определение предела на языке неравенств.

Аналогичное утверждение имеет место и для чисел $B > A$. Таким образом, если функция имеет предел в точке a, то в некоторой окрестности точки a она ограничена и сверху, и снизу.

Упражнение. Выясните, каким образом изменится формулировка леммы, если предел $f(x)$ в точке a равен $+\infty$ или $-\infty$.

Упражнение. Покажите, что утверждение о локальной ограниченности справедливо также для функций, имеющих конечный предел при $x \to \pm\infty$.

Упражнение. Функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в точке a конечный предел. Пусть для любого числа $B < 0$ существует окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $B < f(x)$. Докажите, что тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant 0$.

Сформулированное утверждение останется верным, если заменить число 0 на любое число A.

Теорема о предельном переходе в неравенстве. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и имеют в точке a конечные пределы A и B соответственно. Кроме того, известно, что в этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$. Тогда $A \leqslant B$.

Упражнение. Докажите эту теорему, используя метод доказательства «от противного».

Замечание. В теореме говорится о сохранении нестрогих неравенств при предельном переходе. Сохранение строгих не гарантируется. Например, рассмотрим функции $f(x) = -x^2$ и $g(x) = x^2$ в окрестности точки $a = 0$. Их пределы при $x \to 0$ совпадают, несмотря на то, что в любой проколотой окрестности нуля выполняется строгое неравенство $f(x) < g(x)$.

Теорема о пределе зажатой функции. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и имеют в точке a равные конечные пределы L. При каждом x из этой окрестности значения функции $h(x)$ заключены между значениями $f(x)$ и $g(x)$. Тогда существует предел $h(x)$ при $x \to a$, и он также равен L.

Упражнение. Докажите, что при любом значении $p > 0$ предел функции $f(x) = x^p \sin\dfrac{1}{x}$ равен нулю.

1.6. Критерии существования предела

Понятно, что если функция имеет предел (конечный или бесконечный) в точке $a \in R$, то она имеет и правый, и левый пределы в этой точке, и они совпадают.

Упражнение. Докажите, что верно и обратное утверждение: если функция имеет в точке $a \in R$ правый и левый пределы, и они совпадают, то она имеет предел в точке a.

Таким образом мы получаем простейший критерий (необходимое и достаточное условие) существования предела.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$ (читается «сигнум»). Она определена во всех точках, кроме точки $x = 0$, причем $\operatorname{sgn} x = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sgn} x = -1$ при $x < 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sgn} x = 1$ и $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sgn} x = -1$. Поэтому функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет предела в точке 0.

Для простоты изложения снова вернемся к случаю, когда функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a, и рассмотрим еще одно определение предела, сформулированное на языке последовательностей.

Определение. $A \in \overline{R}$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $a \in \overline{R}$, если для любой последовательности точек $a_n \to a$ такой, что $a_n \neq a$, существует предел $\lim f(a_n)$, равный A.

Определение предела, данное ранее на языке «ε–δ», называется определением по Коши, а определение на языке последовательностей — определением по Гейне.

Определение. Число $A \in \overline{R}$ называется *частичным пределом* функции $f(x)$ в точке $a \in \overline{R}$, если найдется последовательность $a_n \to a$, такая, что $a_n \neq a$ и $A = \lim f(a_n)$.

Нетрудно видеть, что если функция имеет предел по Коши в точке $a \in \overline{R}$ (конечный или бесконечный), то все ее частичные пределы совпадают. Таким образом, если значение $A \in \overline{R}$ является пределом функции по Коши, то оно же является пределом по Гейне.

Верно и обратное утверждение — если значение $A \in \overline{R}$ является пределом функции по Гейне, то оно же является и пределом по Коши, то есть эти два определения эквивалентны.

Сформулируем это утверждение более точно.

Критерий Гейне. Функция $f(x)$ имеет предел (в смысле Коши) в точке $a \in \overline{R}$, если и только если для любой последовательности $a_n \to a$, такой, что $a_n \neq a$, существует $\lim f(a_n)$.

Заметим, что критерий Гейне «работает» как в случае конечного, так и в случае бесконечного пределов.

Используя критерий Гейне, можно многие замечательные пределы, доказанные для последовательностей, перенести на случай функций. Например, из того, что $\dfrac{n^p}{a^n} \to 0$ при $n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ ($p > 0$, $a > 1$), следует, что $\dfrac{x^p}{a^x} \to 0$ при $x \to +\infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Также число Эйлера e можно определить как $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x$ и далее, сделав замену $z = 1/x$, как $\lim\limits_{z\to 0}(1 + z)^{1/z}$.

Упражнение. Опираясь на то, что $\dfrac{n}{2^n} \to 0$ при $n \to +\infty$, докажите утверждение: $\dfrac{x}{2^x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Также критерий Гейне можно эффективно применять для доказательства того, что предел не существует.

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение. Функция $\sin\frac{\pi}{x}$ определена всюду, кроме точки $x = 0$. Поскольку $f(x)$ является нечетной функцией, сначала рассмотрим ее поведение при $x \to 0+$. Найдем точки $x > 0$, в которых она принимает значения 1 и -1:

решив уравнение $\sin\frac{\pi}{x} = 1$, то есть $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, мы получаем последовательность точек $x'_n = \frac{2}{4n+1}$.

Аналогично, $\sin\frac{\pi}{x} = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, и $x''_n = \frac{2}{4n-1}$.

Заметим, что обе последовательности точек $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ стремятся к 0 при $n \to \infty$, однако $f(x'_n) = 1$, а $f(x''_n) = -1$. Это означает, что функция $f(x)$ не имеет предела справа, а в силу нечетности и предела слева, в точке $x = 0$.

Упражнение. Покажите, что любое значение $\alpha \in [-1; 1]$ является частичным пределом функции $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ в точке $x = 0$.

Если функция имеет конечный предел A в точке $a \in \overline{R}$, то, как мы помним, $\forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(a) \mid (x \in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (f(x) \in U_\varepsilon(A))$. Тогда для любых двух точек x и y из окрестности $\mathring{U}_\delta(a)$ их образы попадают в окрестность $U_\varepsilon(A)$. Нетрудно заметить, что тогда $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$, то есть значения функции в разных точках окрестности $\mathring{U}_\delta(a)$ не могут сильно отличаться друг от друга.

Критерий Коши утверждает, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для существования *конечного* предела функции, а именно:

функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in \overline{R}$ если и только если $\forall\varepsilon\ \exists U_\delta(a) \mid (x, y \in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

(В силу произвольности выбора мы заменили ε на $\varepsilon/2$.)

Следует особо отметить, что в формулировке критерия Коши, как и критерия Гейне, не фигурирует само значение предела функции. Это означает, что с помощью этих критериев можно установить факт существования предела, даже если мы не можем сказать, каково значение этого предела. И уж тем более, с их помощью можно доказать, что предел не существует, если соответствующее условие не выполняется.

Упражнение. Сформулируйте, что означает невыполнение свойства $\forall\varepsilon\ \exists U_\delta(a) \bigm| (x, y \in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ (это свойство называется фундаментальностью)

Пример. Еще раз вернемся к функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$. В любой окрестности точки 0 можем выбрать значения $x > 0$ и $y < 0$, и получить приращение функции $|f(x) - f(y)| = 2$. Взяв $\varepsilon = 1$, мы получаем отрицание фундаментальности:

$$\exists\varepsilon > 0 \bigm| \forall U_\delta(0)\ \exists\ x \in \mathring{U}_\delta(0), \exists\ y \in \mathring{U}_\delta(0) \bigm| |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Более интересный пример доставляет нам *функция Дирихле*, которая является индикатором множества рациональных чисел и определяется следующим образом:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В отличие от рассмотренных ранее функций $f(x) = \sin(\pi/x)$ и $f(x) = \operatorname{sgn} x$, функция Дирихле определена в любой точке.

Упражнение. Покажите, что функция Дирихле не имеет предела ни в одной точке вещественной прямой.

Решение. Рассмотрим произвольную точку $a \in \mathbb{R}$. Независимо от того, является она рациональной или нет, в произвольной ее окрестности содержатся как рациональные, так и иррациональные числа. Другими словами, $\forall U_\delta(a)\ \exists\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a), \exists\ y \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ \big|\ (f(x) = 1,\ f(y) = -1)$, и следовательно, $|f(x) - f(y)| = 2$. Выбрав $\varepsilon = 1$, приходим к отрицанию фундаментальности.

Заметим, что в отличие от критерия Гейне, критерий Коши говорит только о существовании *конечного* предела. Тем не менее, для функции $\operatorname{sgn} x$ и функции Дирихле достаточно было применить критерий Коши, поскольку они ограничены, а значит не могут иметь бесконечный предел.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x^2$. В произвольной окрестности нуля $U_\delta(0)$ выберем точки $x = \delta/2$ и $y = \delta/3$. Тогда $f(x) = 4/\delta^2$, $f(x) = 9/\delta^2$ и $|f(x)-f(y)| = 5/\delta^2$. Понятно, что при стремлении значения δ к нулю приращение $|f(x) - f(y)|$ неограниченно растет, что противоречит фундаментальности. Следовательно, в точке 0 функция не имеет конечного предела.

Упражнение. Используя критерий Гейне или определение бесконечного предела, покажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$

Глава 2

Непрерывность функции в точке

2.1. Определение непрерывности в точке. Виды разрывов

Будем считать, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если существует предел $f(x)$ при $x \to a$, и этот предел совпадает со значением функции в точке a, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Упражнение. Дайте определение непрерывности, расшифровав понятие предела функции на языке «ε–δ» или на языке окрестностей. Такое определение называется определением непрерывности по Коши.

Можно сформулировать определение непрерывности на языке последовательностей (определение непрерывности по Гейне).

Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки a, называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности точек $a_n \to a$, $n \in \mathbb{N}$, существует предел $\lim f(a_n)$, и этот предел совпадает с $f(a)$.

Итак, для исследования функции на непрерывность в точке a нужно установить три факта:

1) функция определена в точке a, то есть существует *конечное* значение $f(a)$

2) существует предел $f(x)$ при $x \to a$

3) предел совпадает со значением функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Если функция не является непрерывной в точке a, то говорят, что она имеет *разрыв* в этой точке. Среди всех возможных ситуаций особо выделяют одну, когда функция имеет в точке a конечные пределы справа и слева, но они не совпадают между собой. Такой разрыв называется *разрывом первого рода*, а разность между пределом справа и пределом слева называют *скачком* функции в точке a.

Например, функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет разрыв первого рода в точке 0, и ее скачок в этой точке равен 2.

Также к разрывам первого рода относят случай, когда функция имеет в точке a конечный предел, но он не совпадает со значением функции в этой точке.

Пример. Функция Римана определяется следующим образом: $f(x) = 0$, если x иррационально, и $f(x) = 1/n$, если x — рациональное число, представленное несократимой дробью m/n, где $n \in \mathbb{N}$.

Для того, чтобы понять, как устроена эта функция, попробуем представить ее график. Заметим, что функция ограничена: ее значения лежат с промежутке от 0 до 1, причем значение 1 она принимает только при целых значениях x, значение $1/2$ — в точках $x = \dfrac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Точки эти расположены довольно редко.

С увеличением n значение дроби $1/n$ уменьшается, а точки, в которых функция принимает это значение, вообще говоря, располагаются чаще (хотя это закономерность не совсем регулярная, и для составных значений n частота точек меньше, однако если n — простое, то на каждом отрезке длины 1 таких точек будет ровно $n - 1$).

В целом график функции Римана напоминает земную атмосферу: верхние слои разрежены, а нижние более плотные.

Покажем, что эта функция имеет предел, равный нулю, в любой точке вещественной прямой. Выберем произвольно точку a и запишем определение того, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid (0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon)$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, нужно доказать лишь, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid (0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow (f(x) < \varepsilon)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что $(\frac{1}{n_0} < \varepsilon)$, поэтому достаточно показать, что

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\delta > 0 \mid (0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow (f(x) < \frac{1}{n_0})$$

Зададимся вопросом: сколько на интервале $(a-\delta; a+\delta)$ может быть точек, в которых условие $f(x) < \dfrac{1}{n_0}$ не выполняется? В этих точках выполняется неравенство $f(x) \geqslant \dfrac{1}{n_0}$, то есть x — рациональное число, представленное несократимой дробью m/n, где $n \in \mathbb{N}$ и $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n_0}$, что равносильно условию $n \leqslant n_0$.

Таким образом, знаменатель дроби $x = m/n$ не должен превосходить значения n_0. На интервале $(a-\delta; a+\delta)$ таких точек конечное число, и среди них можно выбрать точку x^*, ближайшую к точке a $(x^* \neq a)$. Уменьшим радиус окрестности, положив $\delta = |x^* - a|$. Тогда для всех точек проколотой окрестности $\mathring{U}_\delta(a)$ выполняется условие $f(x) < \dfrac{1}{n_0}$.

Итак, мы указали алгоритм, который позволяет по любому $\varepsilon > 0$ указать проколотую окрестность точки a, в которой $|f(x)| < \varepsilon$, то есть доказали, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Отсюда сразу же следует, что функция Римана непрерывна в каждой иррациональной точке и имеет разрыв первого рода в каждой рациональной точке.

Упражнение. Определим функцию $f(x)$ по аналогии с функцией Римана: $f(x) = 0$, если x иррационально, и $f(x) = n$, если x — рациональное число, представленное несократимой дробью m/n, где $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что эта функция неограничена в любой точке a (то есть в любой окрестности точки a она принимает как угодно большие значения), хотя и определена в каждой точке.

Понятие *разрыв второго рода* включает в себя все многообразие оставшихся ситуаций. Так, функция $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку не имеет предела в этой точке (хотя и ограничена). А функция $f(x) = 1/x^2$ в точке $x = 0$ имеет бесконечный предел, и эта точка также является точкой разрыва второго рода.

Функция Дирихле определена в любой точке вещественной прямой, однако не имеет предела ни в одной точке. Следовательно, в любой точке она также терпит разрыв второго рода.

Как мы помним, для вопрос о существовании предела последовательности решался достаточно просто, если последовательность была монотонной. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для функций.

Теорема о пределе монотонной функции. Пусть возрастающая функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Тогда существуют пределы (конечные или бесконечные) $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, причем $A = \inf\limits_{x\in(a;b)} f(x)$, $B = \sup\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Упражнение. Сформулируйте теорему о существовании предела для убывающей функции $f(x)$.

Таким образом, если монотонная функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, то в любой внутренней точке интервала она либо непрерывна, либо терпит разрыв первого рода.

Действительно, выбрав произвольно точку c на интервале $(a; b)$, достаточно применить теорему о пределе монотонной функции к интервалам $(a; c)$ и $(c; b)$.

Отсюда следует простой признак, позволяющий установить непрерывность монотонной функции: если значения монотонной на интервале функции содержатся в некотором интервале и сплошь его заполняют (то есть каждое значение принимается функцией хотя бы один раз), то эта функция непрерывна.

Как мы увидим в главе 3, сформулированное условие является не только достаточным, но и необходимым, то есть указанное свойство присуще каждой монотонной непрерывной на интервале функции.

2.2. Непрерывность функций, заданных аналитическими выражениями

Помимо определения, при исследовании функции на непрерывность мы также будем пользоваться следующими фактами:

1) все основные элементарные функции (степенные, тригонометрические, показательные) и обратные к ним непрерывны в любой внутренней точке области определения

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (последнее при условии, что $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a

3) если функция $g(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $g(a)$, то их композиция $f(g(x))$ непрерывна в точке a

Примеры: любой многочлен является непрерывной функцией; рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, в которой ее знаменатель отличен от нуля; функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в точках $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ как отношение функций $\sin x$ и $\cos x$; функция $\sqrt{1+x^2}$ непрерывна в любой точке как композиция непрерывных функций.

Перечисленные выше свойства позволяют быстро исследовать на непрерывность многие функции, заданные аналитическими выражениями. Как правило, после применения указанных теорем у нас остается небольшое количество точек, в которых эти теоремы «не работают», и требуется более тщательное исследование с применением других свойств или по определению.

Так, часто встречается ситуация, когда функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, однако значение $f(x)$ в самой точке a не определено. В этом случае разрыв можно устранить, положив значение $f(a)$ равным значению предела A. В результате функция $f(x)$ станет непрерывной в точке a.

Такая процедура называется *доопределением функции по непрерывности* и является настолько естественной, что зачастую функцию по умолчанию считают доопределенной по непрерывности в тех точках, в которых это возможно. Мы тоже примем такое соглашение.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-1/x^2}$. Она определена во всех точках вещественной прямой, кроме точки $x = 0$, и непрерывна в этих точках как композиция непрерывных функций e^x и $(-1/x^2)$.

Поскольку $\lim\limits_{x \to 0}(-1/x^2) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, то в точке $x = 0$ исследуемая функция e^{-1/x^2} имеет предел, равный 0. Положив значение $f(0)$

равным 0, мы добьемся выполнения условия $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, то есть получим непрерывную в точке 0 функцию.

Замечание: если функция не имеет конечного предела в точке a, то никакое доопределение функции в этой точке не сделает ее непрерывной. Например, функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ часто присваивают значение $f(0) = 0$, но делают это по другим причинам (например, так сохраняется нечетность этой функции, к тому же значение в точке разрыва первого рода становится равным полусумме пределов справа и слева).

Однако, если у функции в точке a есть предел справа (слева) и он совпадает со значением функции в этой точке, то говорят, что функция *непрерывна справа (слева)* в точке a.

Так, все основные элементарные функции и обратные к ним непрерывны слева (справа) в крайней правой (левой) точке области определения. Например, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x = 0$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{1/x}$. Она определена во всех точках вещественной прямой, кроме точки $x = 0$, и непрерывна в этих точках как композиция непрерывных функций e^x и $1/x$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0-}(1/x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, то можно доопределить функцию в точке $x = 0$ нулем, после чего она станет непрерывной слева.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+}(1/x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, то в точке $x = 0$ справа исследуемая функция имеет неустранимый разрыв.

Упражнение. Доопределите функцию $f(x) = x \ln x$ в точке $x = 0$ так, чтобы она стала непрерывной справа в этой точке.

Колебанием функции $f(x)$ *на множестве* M называется величина $\omega[f; M] = \sup\limits_{x,y\in M} |f(x) - f(y)|$

Колебанием функции $f(x)$ *в точке* a называется величина $\omega[f; a] =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \omega[f; U_{1/n}(a)]$.

Этот предел (конечный или бесконечный)всегда существует, причем вместо системы окрестностей $U_{1/n}(a)$ можно выбрать любую последовательность окрестностей, лишь бы их радиусы стремились к нулю.

Условие непрерывности функции в точке эквивалентно тому, что ее колебание в этой точке равно нулю.

Упражнение. Доопределим функцию $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ значением $f(0) = 0$. Вычислите колебание этой функции на множестве $U_\delta(0)$ и в точке 0. Что можно сказать о непрерывности функции в точке $x = 0$?

2.3. Раскрытие простейших неопределенностей

При исследовании на непрерывность функции, заданной аналитическим выражением, наибольший интерес представляют точки, в которых «не работают» теоремы о непрерывности суммы (разности), произведения, частного и композиции непрерывных функций.

Например, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и в точке a обе функции $f_i(x)$ стремятся к бесконечности одного знака, или $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ и в точке a функция $f_1(x)$ стремятся к нулю, а $f_2(x)$ — к бесконечности.

Такие ситуации называют *неопределенностями*, поскольку предел функции $f(x)$ в точке a может быть каким угодно в зависимости от конкретного вида функций $f_i(x)$, а может и вовсе не существовать. Условно неопределенности рассмотренных видов обозначают символами $[\infty - \infty]$ и $[0 \cdot \infty]$ соответственно.

Чтобы выяснить, существует в таком случае предел $f(x)$ в точке a или нет, и если существует — то каково его значение, нужно предпринять дополнительные усилия, как правило — преобразовать аналитические выражения таким образом, чтобы стало возможным использование перечисленных выше теорем.

Такие действия называются *раскрытием неопределенностей*, и основаны они на следующем замечании: если функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой проколотой окрестности точки a, то либо они обе не имеют предела при $x \to a$, либо их пределы равны.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x = 1$, но в любой проколотой окрестности этой точки она совпадает с функцией $g(x) = x+1$. Функция $g(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, поэтому ее предел равен ее значению в этой точке. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.

Обычно эти рассуждения произносят, но не записывают, и вычисление предела функции $f(x)$ выглядит следующим образом:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Хотя этот пример кажется тривиальным, в нем содержится алгоритм раскрытия неопределенностей вида $[\,\dfrac{0}{0}\,]$ (или $[\dfrac{\infty}{\infty}]$): надо в числителе и знаменателе выделить множители, стремящиеся к 0 (или ∞) и сократить дробь.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

Во-первых, убедимся, что воспользоваться теоремой о пределе частного нам не удастся, поскольку и числитель, и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \to 2$.

Во-вторых, вспомним следствие из теоремы Безу, которое гласит: если многочлен $P(x)$ обращается в ноль в точке $x = a$, то он делится на $(x-a)$ без остатка, то есть $P(x)$ может быть представлен в виде произведения $(x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен.

Технически разложение на множители можно выполнять разными способами: делить «уголком», группировать слагаемые и выделять общие множители. Так или иначе, мы получим следующие разложения: $x^3-2x^2-4x+8=(x-2)(x^2-4)$ и $x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$. После чего сократим дробь:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

Пример. Пусть $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+...+b_1x+b_0}$ — рациональная функция ($a_n\neq 0$ и $b_m\neq 0$). Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)$.

Выделим в числителе и знаменателе дроби множитель x в наибольшей степени и сократим дробь:

$$R(x)=\frac{x^n(a_n+a_{n-1}x^{-1}+...+a_1x^{1-n}+a_0x^{-n})}{x^m(b_m+b_{m-1}x^{-1}+...+b_1x^{1-m}+b_0x^{-m})}=$$
$$=x^{n-m}\frac{(a_n+a_{n-1}x^{-1}+...+a_1x^{1-n}+a_0x^{-n})}{(b_m+b_{m-1}x^{-1}+...+b_1x^{1-m}+b_0x^{-m})}$$

Последняя дробь имеет конечный предел $\dfrac{a_n}{b_m}$, поскольку при $x\to\infty$ слагаемые x^{-1}, x^{-2}, и т. д. стремятся к нулю. А для множителя x^{n-m} возможны три варианта: $\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\infty, \text{ если } n>m\\ 1, \text{ если } n=m\\ 0, \text{ если } n<m\end{cases}$

Соответственно, $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, \text{ если } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, \text{ если } n=m\\ 0, \text{ если } n<m\end{cases}$

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+px+q}-x)$.

Неопределенность вида $[\infty-\infty]$, с которой мы встретились в этом примере, обычно преобразуют в неопределенность вида $[\,\frac{0}{0}\,]$ или $[\frac{\infty}{\infty}]$. В данном случае это можно сделать, домножив и поделив функцию $(\sqrt{x^2+px+q}-x)$ на «сопряженное» выражение $(\sqrt{x^2+px+q}+x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+px+q}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+px+q}-x)(\sqrt{x^2+px+q}+x)}{\sqrt{x^2+px+q}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+px+q-x^2}{\sqrt{x^2+px+q}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{px+q}{\sqrt{x^2+px+q}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(p+qx^{-1})}{x(\sqrt{1+px^{-1}+qx^{-2}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{p+qx^{-1}}{\sqrt{1+px^{-1}+qx^{-2}}+1}=\frac{p}{2}$$

Как далеко простирается могущество метода «домножения на сопряженное выражение»? Увы, не слишком. Дело в том, что этот метод основан на формуле

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Множители в правой части этой формулы и называются «сопряженными». Количество слагаемых во втором множителе равно $(n+1)$, поэтому при $n>3$ вычисления становятся довольно громоздкими.

Упражнение. На какое выражение нужно домножить разность $\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}$, чтобы избавиться от радикалов?

Помимо алгебраических формул «сокращенного умножения» и бинома Ньютона, не стоит забывать и основные формулы тригонометрии.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x=2$.

Удастся ли нам решить аналогичную задачу, если вместо $\cos 2x$ написать $\cos\sqrt{2}x$, а вместо $\sin^2 x$ поставить $\sin x^2$ или $\sin\sqrt{x}$?

2.4. Асимптотическое сравнение функций

Как видим, алгебраические преобразования начинают «пробуксовывать» даже в весьма незамысловатых ситуациях. Однако в математическом анализе есть мощный метод, позволяющий легко справляться не только с алгебраическими, но и с трансцендентными функциями. Это метод основан на замене сложной функции на «почти равную» ей, но более простую функцию.

Определения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны*, или *асимптотически равны*, при $x \to a$, если $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$. Записывают: $f(x) \sim g(x)$.

Говорят, что функция $f(x)$ *бесконечно мала относительно* $g(x)$ при $x \to a$, если $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Записывают: $f(x) = o(g(x))$ (читается «о-малое»).

Говорят, что функция $f(x)$ *ограничена относительно* $g(x)$ при $x \to a$, если $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a. Записывают: $f(x) = O(g(x))$ (читается «о-большое»).

Замечания

1. Символ «о-малое» вовсе не означает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ малы. Например, $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^2})$ при $x \to 0$, хотя обе эти функции являются бесконечно большими при $x \to 0$. Мы всего лишь сравниваем функции между собой.

2. Символы «о-малое» и «о-большое» выражают разные, но не противоположные свойства. То есть, если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, это не

значит, что $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$.

Упражнение. Покажите, что если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

Можно это свойство записать в виде $o(g(x)) = O(g(x))$, однако читать это равенство следует исключительно слева направо, поскольку обратное утверждение неверно.

Упражнение. Покажите, что $\sin x = O(1)$ при $x \to \infty$, но неверно, что $\sin x = o(1)$ при $x \to \infty$.

Упражнение. Покажите, что если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, а также $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.

Равенство $f(x) - g(x) = o(g(x))$ можно преобразовать к виду $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то есть представить функцию $f(x)$ в виде суммы двух слагаемых, второе из которых мало по сравнению с первым. В этом случае говорят, что $g(x)$ есть *главная часть* функции $f(x)$ при $x \to a$. Таким образом, утверждение о том, что $g(x)$ является главной частью функции $f(x)$ при $x \to a$ равносильно тому, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Вообще говоря, главная часть функции определяется не единственным образом.

Упражнение. Проверьте, что $\dfrac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^2+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ и $\dfrac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^2+1}} \sim \dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$.

Как правило, стараются выделить главную часть как можно более простого вида. Во многих случаях, хотя и не всегда, это оказывается степенная функция.

Упражнение. Покажите, что при $x \to 0$ бесконечно малая функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ не сравнима ни с какой бесконечно малой степенной функцией x^p $(p > 0)$, то есть ни при каком $p > 0$ не может выполняться асимптотическое равенство $f(x) \sim Kx^p$, где K — конечное число, отличное от нуля.

Далее мы получим основные асимптотические равенства при $x \to 0$, опираясь на два замечательных предела: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

1. По определению $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ означает, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$, откуда следует, что $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

3. Поскольку $(1+x)^{1/x} \to e$ при $x \to 0$, а $\ln x$ является непрерывной функцией, то $\ln(1+x)^{1/x} \to \ln e$. Заметив, что $\ln(1+x)^{1/x} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, а $\ln e = 1$, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Таким образом, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

4. Сделав в предыдущем примере замену $z = \ln(1+x)$, мы получим еще один предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{e^z - 1} = 1$. Отсюда $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

5. Применяя основное логарифмическое тождество $a = e^{\ln a}$ для $a = 1 + x$, а затем полагая $z = \ln(1+x)$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{p\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{pz} - 1}{e^z - 1} = p.$$

Отсюда следует, что $(1+x)^p - 1 \sim px$ при $x \to 0$.

В частности, при $p = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, получаем формулу для корней $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$ при $x \to 0$.

Имея в распоряжении эти пять основных формул, можно дальше расширять список асимптотических равенств.

Упражнение. Покажите, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$ эквивалентны функции x при $x \to 0$.

Наконец у нас есть запас асимптотических формул, достаточный для раскрытия тех неопределенностей, с которыми трудно или невозможно было справиться алгебраическими преобразованиями.

Докажем утверждение **об асимптотической замене множителя**: если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot h(x)$, или оба эти предела не существуют.

Действительно, асимптотическое равенство $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)h(x)\Big) = \\ = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot \lim_{x\to a} g(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x)$$

Упражнение. Докажите аналогичное утверждение для частного: если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}$.

Теперь посмотрим, как замена множителя на эквивалентный позволяет вычислять пределы.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

Формулу $(1+x)^p - 1 \sim px$ при $x \to 0$ можно преобразовать, сделав замену $z = 1 + x$. Тогда $z^p - 1 \sim p(z-1)$ при $z \to 1$.

В частности $\sqrt{z} - 1 \sim \frac{z-1}{2}$ при $z \to 1$. Если положить $z = \cos x$, то $z \to 1$ при $x \to 0$. Поэтому $1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{1}{2}(1-\cos x) \sim \frac{x^2}{4}$.

Теперь перейдем к знаменателю: $1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}$, поскольку $1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$ при $z \to 0$ (здесь $z = \sqrt{x} \to 0$ при $x \to 0$).

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/4}{x/2} = 0.$

Замечание: метод замены множителя на эквивалентный настолько эффективен, что некоторые студенты не могут устоять перед искушением, и заменяют на эквивалентные функции отдельные *слагаемые*, а не *множители*. Это может привести к ошибкам!

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Покажем, как не следует делать, но все же так делают многие:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

На самом деле этот предел не равен нулю. Приводим правильное решение, в котором сначала выделяются множители, и только потом они заменяются на эквивалентные:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x/2)^2}{1\cdot x^2} = \frac{1}{2}$$

2.5. Степенно-показательная функция

Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой при вычислении предела может возникнуть неопределенность. Речь идет о функции вида $f(x)^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$.

Эта функция не является ни степенной, ни показательной, так как при изменении аргумента x одновременно меняются и основание, и показатель степени. Однако ее можно представить в виде композиции более простых функций, используя основное логарифмическое тождество:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

Поскольку функция e^z определена и непрерывна при всех значениях аргумента, то, зная предел показателя $g(x) \cdot \ln f(x)$, мы можем найти и предел функции $f(x)^{g(x)}$:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot \ln f(x))}$$

В каких случаях при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}(g(x) \cdot \ln f(x))$ может возникнуть неопределеность? Когда один из множителей стремится к нулю, а другой к бесконечности. Это возможно в трех случаях:

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = 0$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. Для рассматриваемой функции $f(x)^{g(x)}$ получаем неопределенность вида $[\ 1^\infty\ ]$.

2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = +\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Для рассматриваемой функции $f(x)^{g(x)}$ получаем неопределенность вида $[\ \infty^0\ ]$.

3. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Для рассматриваемой функции $f(x)^{g(x)}$ получаем неопределенность вида $[\ 0^0\ ]$.

Упражнение. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Рассмотрим подробнее алгоритм раскрытия неопределенности вида $[\ 1^\infty\ ]$. Поскольку $f(x) \to 1$ при $x \to a$, а $\ln z \sim (z-1)$ при $z \to 1$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot \ln f(x))} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot (f(x)-1))}$$

С этого рассуждения начинается решение любой задачи такого типа. А дальше все зависит от конкретного вида функций $f(x)$ и $g(x)$.

Упражнение. Вычислите $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Убедившись, что мы имеем дело с неопределенностью вида $[\ 1^\infty\ ]$, применяем описанный выше алгоритм:

$$\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}2x\cdot\ln(\operatorname{tg}x))} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-1))}$$

Далее, вспоминая тригонометрические формулы, получаем

$$\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-1) = \lim_{x\to\pi/4}\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot(\operatorname{tg}x-1) = \lim_{z\to1}\frac{2z(z-1)}{1-z^2} = -1$$

2.6. Линейные асимптоты функции на бесконечности

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с исследованием асимптотического поведения функции, определенной в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение. Прямая $y = ax+b$ называется линейной *асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, если разность $f(x)-(ax+b)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ $(-\infty)$.

Слово «линейная» в названии асимптоты как правило опускают.

Если коэффициент $a = 0$, асимптоту называют *горизонтальной*, а противном случае — *наклонной*.

Легко видеть, что наличие горизонтальной асимптоты у графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ равносильно существованию конечного предела $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Получим необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты у графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Введем обозначение $\alpha(x) = f(x) - (ax + b)$. Если прямая $y = ax + b$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, то $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим разность $f(x)-ax = b+\alpha(x)$ и поделим ее на x. Нетрудно видеть, что $\dfrac{f(x)-ax}{x} = \dfrac{b+\alpha(x)}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

С другой стороны, $\dfrac{f(x)-ax}{x} = \dfrac{f(x)}{x} - a$, поэтому $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

После того, как значение коэффициента a определилось, остается заметить, что $b = f(x) - ax - \alpha(x)$, следовательно, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

Существование пределов $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ и является необходимым и достаточным условием существования асимптоты.

Условия для асимптоты при $x \to -\infty$ получаются аналогично.

Подчеркнем, что должны одновременно существовать *оба* предела.

Упражнение. Покажите, что графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $f(x) = \ln x$ не имеют асимптот при $x \to +\infty$, хотя один из указанных пределов все же существует.

Отметим также, что существование асимптот в правой и левой окрестности бесконечности никак между собой не связано. Так, у функции $f(x) = e^x$ существует горизонтальная асимптота $y \equiv 0$ при $x \to -\infty$, и не существует асимптоты при $x \to +\infty$.

Упражнение. Найдите асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+5}}$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Глава 3

Глобальные свойства непрерывных функций

Понятие непрерывности ведет свое начало от интуитивного представления о линии, которую «рисует» точка при движении на плоскости или в пространстве. Соответственно, непрерывную функцию в 17–19 в.в. определяли как функцию, которая не может пройти от одного значения к другому, не пройдя через все промежуточные значения.

Однако в процессе становления математического анализа стремление к строгости и желание подвести под рассуждения прочный фундамент привели математиков к определению непрерывности, которое мы видели в предыдущей главе. В нем непрерывность функции определяется как локальное свойство, то есть свойство функции в окрестности некоторой выделенной точки.

Функция называется *непрерывной на множестве* A, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Как видим, в этом определении нет ничего, что соответствовало бы нашему интуитивному представлению о непрерывности.

В настоящей главе мы обсудим так называемые «глобальные» свойства непрерывных функций, и увидим, что функции, непрерывные на отрезке, действительно обладают теми желанными и привычными для нас свойствами, которыми мы часто пользовались и ранее, не отдавая себе в этом отчета.

3.1. Образ отрезка при непрерывном отображении: теоремы Вейерштрасса и Больцано–Коши

Определения.

Пусть a и b — конечные числа. *Отрезком* $[a;b]$ мы будем называть множество точек $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, *интервалом* $(a;b)$ — множество точек $\{x \mid a < x < b\}$.

Множества $[a;b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ и $(a;b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ будем называть *полуинтервалами*.

Промежутком $< a;b >$ мы будем называть такое множество точек вещественной прямой, которое вместе с любыми точками x и y содержит отрезок $[x;y]$, их соединяющий.

Упражнение. Какие из перечисленных ниже множеств можно назвать промежутками: полуинтервал $[a;b)$, луч $(a;+\infty) = \{x \mid a < x\}$; дополнение отрезка до прямой $\mathbb{R} \setminus [a;b]$.

Упражнение. Будет ли являться промежутком пересечение двух промежутков? Будет ли являться промежутком объединение двух промежутков?

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве M и для всех x из M выполняется неравенство $f(x) \leqslant K$. Если существует точка $c \in M$ такая, что $f(c) = K$, то говорят, что в точке c функция *достигает* своего наибольшего значения на множестве M.

Аналогично, если $\forall x \in M (f(x) \geqslant L)$ и $\exists c \in M \;\big| f(x) = L$, то говорят, что в точке c функция *достигает* своего наименьшего значения на множестве M.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений.

Несмотря на простоту формулировки, ни одно из условий теоремы нельзя опустить, о чем свидетельствуют следующие примеры.

Упражнение. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$ и доопределим ее в нуле: $f(0) = 0$. Убедитесь, что она не ограничена на отрезке $[-1;1]$.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Убедитесь, что она непрерывна, но не ограничена на нем.

Замечание. Если функция непрерывна в точке a, то она локально ограничена, то есть у точки a найдется окрестность, в которой функция ограничена. Однако в целом на интервале она может быть не ограничена, в чем мы и убедились только что.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = x$ на интервале $(-1;1)$. Убедитесь, что она ограничена на этом интервале, но не достигает на нем наибольшего и наименьшего значений. Если доопределить функцию $f(x)$ в концах интервала нулями: $f(-1) = 0$ и $f(1) = 0$, то она будет определена и ограничена на отрезке $[-1;1]$, однако по-прежнему не будет достигать наибольшего и наименьшего значений.

Теорема о корне уравнения $f(x) = 0$. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков (то есть $f(a) \cdot f(b) < 0$), то найдется точка $c \in [a;b]$ такая, что $f(c) = 0$.

Другими словами, на отрезке $[a;b]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере одно решение. Понятно, что если функция $f(x)$ еще и строго монотонная, то это решение единственно.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \lg x$. Она строго монотонно возрастает, поскольку является суммой двух строго монотонно возрастающих функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \lg x$. Кроме того, она непрерывна как сумма двух непрерывных функций.

На концах отрезка $[0,1;1]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков: $f(0,1) = -0,9$, $f(1) = 1$. Следовательно, уравнение $x + \lg x = 0$ имеет единственный корень, и этот корень расположен в интервале $(0,1;1)$.

После того, как корень локализован, можно использовать различные методы его приближенного вычисления (метод хорд, метод касательных). Эти методы основаны на том, что найденный отрезок делится на две (не обязательно равные) части, после чего проверяются знаки функции на концах полученных отрезков, и выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. После чего процесс деления отрезка повторяется.

Замечание. Теорема о корне уравнения утверждает лишь существование хотя бы одной такой точки c, что $f(c) = 0$, но ничего не говорит ни о количестве таких точек, ни о том, чему равны их значения.

Упражнение. Функцию $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ с областью определения $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ доопределим в нуле: $f(0) = 1$. Убедитесь, что в точках $a = -1$ и $b = 1$ она принимает значения разных знаков. Покажите, что ни в одной точке отрезка $[-1;1]$ функция не обращается в ноль. Какое условие теоремы здесь нарушено?

Условия теоремы являются достаточными, но не являются необходимыми, о чем говорят следующие примеры.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[-1;1]$. Ни в одной точке этого отрезка функция не принимает отрицательных значений. Однако уравнение $f(x) = 0$ имеет решение на этом отрезке.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. На концах отрезка значения функции равны -1. Тем не менее уравнение $\cos x = 0$ имеет на этом отрезке два решения.

Множество решений уравнения $f(x) = 0$ не всегда состоит из изолированных точек.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = |x+1| - |x-1| - 2x$. Какие значения принимает $f(x)$ в точках -2 и 2? Опишите множество корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 2]$.

Упражнение. Покажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то множество корней уравнения $f(x) = 0$, принадлежащих этому отрезку, является замкнутым.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \sin(\pi/x)$ на интервале $(0; 1)$. Опишите множество корней уравнения $f(x) = 0$, прилежащих этому интервалу. Найдите все предельные точки этого множества.

Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, то для любого значения γ из отрезка $[\alpha; \beta]$ при $\alpha < \beta$ (или из отрезка $[\beta; \alpha]$ при $\beta < \alpha$) найдется точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = \gamma$.

То есть любое значение, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, функция принимает хотя бы один раз.

Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении является обобщением теоремы о корне уравнения. Она утверждает, что если на одном из концов отрезка $[a; b]$ непрерывная функция $f(x)$ имеет значение, большее числа γ, а на другом конце — значение, меньшее числа γ, то уравнение $f(x) = \gamma$ имеет хотя бы одно решение в интервале $(a; b)$.

Пример. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим произвольный набор точек $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ из этого отрезка и определим среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в этих точках:

$$F = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

Тогда существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = F$.

Действительно, обозначив через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (а они существуют!), легко получить оценку

$$m \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \leqslant M$$

Тогда по теореме о промежуточном значении найдется точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = F$.

Замечание. Теорема не утверждает, что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает *только* значения, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$. Хотя для монотонной функции это действительно так.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. На концах отрезка значения функции равны нулю. Какое множество является образом отрезка $[-\pi; \pi]$ при отображении $f(x) = \sin x$?

Упражнение. Покажите, что непрерывная функция отображает отрезки в отрезки, и следовательно, промежутки в промежутки.

Вспомним, что при изучении теории вещественного числа мы доказывали равномощность интервала и вещественной прямой, подбирая взаимно-однозначное отображение, являющиеся композицией элементарных функций. Однако, чтобы доказать равномощность интервала $(0; 1)$ и отрезка $[0; 1]$, нам пришлось строить более сложное отображение. Теперь становится понятно, почему это невозможно было сделать с помощью композиции элементарных функций. Действительно, все элементарные функции непрерывны на области своего определения, а образом отрезка при непрерывном отображении может быть только отрезок, но не интервал.

Упражнение. Может ли отрезок быть образом интервала при непрерывном отображении? Рассмотрите, например, функцию $f(x) = \sin x$ и подберите подходящий интервал.

3.2. Монотонность и обратимость

Напомним, что если функция $f(x)$ определена на интервале и монотонна, то в любой внутренней точке интервала она либо непрерывна, либо терпит разрыв первого рода. Можно показать, что множество точек разрыва монотонной на отрезке функции не более чем счетно. Таким образом, монотонная на отрезке функция обязательно имеет на этом отрезке точки непрерывности. Далее мы обсудим связь непрерывности и монотонности функции.

Признак непрерывности монотонной функции. Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на промежутке $< a; b >$. Если образ $f(< a; b >)$ является промежутком, то функция $f(x)$ непрерывна.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Признак строгой монотонности. Если функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $< a; b >$, является инъективной (то есть из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$), тогда она строго монотонна.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ на интервале $0 < x < 1$, и определим ее значения в граничных точках: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Заметим, что образом отрезка $[0; 1]$ при отображении $y = f(x)$ является отрезок $[0; 1]$, однако функция не является непрерывной. Также заметим, что каждое значение из промежутка $[0; 1]$ функция принимает ровно один раз, то есть отображение является инъективным. Однако функция $f(x)$ не является монотонной.

Упражнение. Пусть $f(x)$ — непрерывная строго монотонная функция. Выясните, промежутком какого вида может быть образ интервала $(a; b)$ при отображении $y = f(x)$.

Теорема об обратной функции. Если строго возрастающая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $< a; b >$, то она обратима. Обратная функция определена на промежутке $< f(a); f(b) >$, непрерывна и также строго возрастает.

Пример. Вернемся к предыдущему примеру: функция $f(x) = x$ на интервале $0 < x < 1$ и $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Поскольку каждое значение из промежутка $[0; 1]$ функция принимает ровно один раз, то для каждого $\gamma \in [0; 1]$ уравнение $f(x) = \gamma$ имеет единственное решение. Это означает, что существует обратное отображение.

Нетрудно видеть, что обратная функция $x = g(y)$ определяется аналогично: $g(y) = y$ при $0 < y < 1$, и $g(0) = 1$, $g(1) = 0$. Как видим, обратная функция также не является непрерывной.

3.3. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Как мы помним, функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве M, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Расшифруем, что это означает, на языке «ε–δ»: функция $f(x)$ непрерывна на множестве M, если

$$\forall x_0 \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \Big| \ (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Отметим, что значение δ подбирается после того, как выбраны значения x_0 и ε, то есть $\delta = \delta(x_0; \varepsilon)$. Это означает, что при одном и том же значении ε в разных точках x_0 значения δ, вообще говоря, могут быть различны.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = 1/x$. Найдите зависимость $\delta(x_0; \varepsilon)$ в точках $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 1/2$.

Возникает естественный вопрос: можно ли при заданном значении ε подобрать $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы это значение δ подходило сразу для всех точек множества M? Если это возможно, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве M. Сформулируем это определение на языке неравенств.

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве M, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 \ \Big| \forall x_0, \ x_1 \in M \ (|x_1 - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = 1/x$ является равномерно непрерывной на любом луче $(a; +\infty)$, где $a > 0$.

Заметим, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве M, то она равномерно непрерывна на любом подмножестве множества M. Таким образом, функция $f(x) = 1/x$ является равномерно непрерывной на любом интервале $(a; b)$, где $0 < a < b$.

Понятно, что функция, равномерно непрерывная на множестве M, является непрерывной на этом множестве. Обратное неверно.

Упражнение. Запишите на языке «ε–δ» отрицание определения равномерной непрерывности функции на множестве M.

Пример. Покажем, что функция $f(x) = 1/x$ не является равномерно непрерывной на множестве $M = (0; 1)$.

Выберем точку $x_0 \in (0;1)$ и вслед за ней точку $x_1 = \frac{x_0}{2}$. Оценим приращение функции в этих точках:

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x_1|}{x_1 \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Понятно, что чем ближе точка x_0 к нулю, тем больше приращение функции, даже несмотря на то, что расстояние между точками x_0 и x_1 уменьшается. По-видимому, нам не удастся найти зависимость $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы это значение δ подходило сразу для всех точек интервала $(0;1)$.

Действительно, поскольку $x_0 \in (0;1)$ и $x_1 = \frac{x_0}{2}$, то

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x_1|}{x_1 \cdot x_0} = \frac{1}{x_0} > 1$$

С другой стороны, для произвольного $\delta > 0$ можно найти на интервале $(0;1)$ пару точек x_0 и $x_1 = \frac{x_0}{2}$ таких, что $|x_0 - x_1| < \delta$, если выбирать $x_0 < \delta$.

Таким образом, выбрав $\varepsilon = 1$, мы для произвольного $\delta > 0$ можем указать точки x_0 и x_1 из интервала $(0;1)$, для которых приращение функции $|f(x_1) - f(x_0)|$ больше ε. А это и значит, что функция $f(x) = 1/x$ не является равномерно непрерывной на множестве $M = (0;1)$.

Как видим, на любом интервале $(a;1)$, где $a > 0$, функция равномерно непрерывна, а на интервале $(0;1)$ это свойство теряется.

Теорема Кантора. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, равномерно непрерывна на нем.

Как мы видели, если вместо замкнутого промежутка (отрезка) взять открытый (интервал), то функция может не быть равномерно непрерывной. Также важно, что промежуток в теореме Кантора является ограниченным, то есть имеет конечную длину.

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на любом интервале $(0; a)$, где $a > 0$, но не является равномерно непрерывной на луче $(0; +\infty)$.

Заметим, что функция $f(x) = x^2$ является произведением двух равномерно непрерывных функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x$. Таким образом, утверждение о равномерной непрерывности произведения равномерно непрерывных функций не верно. В то же время сумма двух равномерно непрерывных функций является равномерно непрерывной функцией. Докажите это.

Упражнение. Покажите, что функция если $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$, то она равномерно непрерывна и на отрезке $[a; b]$.

Упражнение. Используя предыдущее утверждение, докажите, что функция $f(x) = \sin^2 x$ равномерно непрерывна на всей вещественной прямой.

Упражнение. Покажите, что *ограниченная* функция $f(x) = \sin x^2$ равномерно непрерывна на любом интервале $(0; a)$, где $a > 0$, но не является равномерно непрерывной на луче $(0; +\infty)$.

Замечание. Равномерная непрерывность функции на множестве M означает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon)$ таким образом, что на произвольном промежутке из M, длина которого меньше δ, колебание функции будет меньше $\varepsilon > 0$.

Упражнение. Покажите, что *ограниченная* функция $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0; a)$, где $a > 0$.

Разглядывая графики функций $f(x) = 1/x$ и $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$ вблизи точки $x = 0$, можно подумать, что отсутствие равномерной непрерывности на интервале $(0; a)$ объясняется тем, что наклон графика по отношению к оси Ox может быть как угодно велик. В этом есть доля истины, но ситуация не так проста, как может показаться на первый взгляд.

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0; 1)$, хотя вблизи точки $x = 0$ наклон ее графика по отношению к оси Ox может быть как угодно велик.

Упражнение. Покажите, что непрерывную на конечном интервале $(a; b)$ функцию $f(x)$ можно продолжить по непрерывности на отрезок $[a; b]$, если и только если она равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$.

Упражнение. Покажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на множестве $(a; +\infty)$ и существует конечный предел $f(x)$ при $x \to +\infty$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $(a; +\infty)$.

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на множестве $(1; +\infty)$, хотя и не имеет конечного предела при $x \to +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M.

Определение. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на множестве M называется неотрицательная возрастающая функция $\omega(t)$ такая, что $\lim\limits_{t \to +0} \omega(t) = 0$ и $\forall x_1,\ x_2 \in M\ |f(x_1) - f(x_0)| < \omega(|x_1 - x_2|)$.

Как мы помним, условие непрерывности функции в точке эквивалентно тому, что ее колебание в этой точке равно нулю.

Теорема. Условие равномерной непрерывности функции на множестве M эквивалентно тому, что на этом множестве у нее существует модуль непрерывности.

Упражнение. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите ее модуль непрерывности степенного вида $\omega(t) = Kt^p$ на промежутках $[0; 1]$ и $[1; +\infty)$.

Глава 4

Приложение

4.1. Вопросы к коллоквиуму

Докажите, что если непрерывная функция равна нулю во всех рациональных точках множества M, то она тождественно равна нулю на множестве M.

Постройте функцию, имеющую бесконечное множество точек разрыва первого рода.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве M. Покажите, что их огибающие $u(x) = \min(f(x); g(x))$ и $v(x) = \max(f(x); g(x))$ также непрерывны на множестве M.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке a. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \to a$ и $\beta(x) \to a$ при $x \to x_0$, причем $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$. Верно ли, что $f(\alpha(x)) \sim f(\beta(x))$ при $x \to x_0$?

Приведите пример немонотонной функции, осуществляющей взаимно-однозначное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Существует ли непрерывная немонотонная функция, взаимно-однозначно отображающая $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$?

Существует ли непрерывная функция, взаимно-однозначно отображающая отрезок на всю числовую прямую?

Функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Докажите, что множество значений функции $f(x)$ ограничено снизу, и функция достигает своего наименьшего значения.

Функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Докажите, что множество значений функции $f(x)$ ограничено, и функция достигает наименьшего либо наибольшего значения. Приведите пример, когда одно из значений не достигается.

Докажите, что периодическая непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}$, ограничена и достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Непрерывная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и ни в одной точке этого отрезка не равна нулю. Докажите, что существует число $\gamma > 0$ такое, что $|f(x)| > \gamma$ для всех $x \in [a;b]$.

Покажите, что для любой непрерывной функции $f : [0;1] \to [0;1]$ существует неподвижная точка c, то есть точка, в которой $f(c) = c$. Приведите пример непрерывной функции, отображающей интервал $(0;1)$ в себя, и не имеющей неподвижной точки.

Докажите, что многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, причем $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Докажите, что на отрезке найдется хотя бы одна точка c, в которой $f(c) = g(c)$.

На плоскости задан многоугольник и некоторая прямая. Показать, что найдется прямая, параллельная заданной, разделяющая многоугольник на две части равной площади.

На плоскости задан многоугольник и некоторая точка. Показать, что найдется прямая, проходящая через эту точку, которая разделяет многоугольник на две части равной площади.

Приведите пример неограниченной равномерно непрерывной функции. Может ли неограниченная функция, определенная на конечном интервале, быть равномерно непрерывной? Обоснуйте ответ.

Докажите, что периодическая непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}$, является равномерно непрерывной.

Приведите пример двух равномерно непрерывных функций, произведение которых не является равномерно непрерывной функцией. Будет ли произведение двух равномерно непрерывных функций, заданных на отрезке, равномерно непрерывной функцией? Обоснуйте ответ.

4.2. Образец контрольной работы

1. Найдите область определения функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ и множество ее значений. Нарисуйте эскиз графика. Постройте обратное отображение для сужения функции f на интервал $(-1; 0)$ (запишите обратную функцию формулой).

2. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x) = (e^{g(x)} - 1)^{-1}$, где $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - x^2}$. Нарисуйте эскиз графика (без использования производной).

3. Вычислите предел функции $f(x) = \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$ при $x \to +0$.

4. Выделите у функции $f(x) = \operatorname{tg}(\pi\sqrt{x})$ при $x \to 1$ главную часть вида $C(x-1)^p$.

5. Определите количество корней уравнения $x^3 - |x| + 1 = 0$ и локализуйте их.

6. Исследуйте функцию $f(x) = e^{-x} \cdot \cos\dfrac{1}{x}$ на равномерную непрерывность на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Оглавление