1.1. **Понятие о математическом моделировании.**

Цели математического моделирования.
Пример постановки обратной задачи в науках о Земле
Области естествознания, в которых необходимо моделирование и решение обратных задач (дистанционное зондирование, неразрушающий контроль, медицинская томография, каротаж).
Основные этапы моделирования.

Моделирование распространения цунами

Математическая модель

Приближение теории мелкой воды (как линейное, так и нелинейное) во всем мире используются как основные модели для описания распространения волны в океане. Эти модели достаточно точно отражают основные параметры волн (время распространения от очага до записывающего приемника и амплитуды) даже для достаточно грубой цифровой батиметрии в предположении, что начальное смещение дна в источнике известно. Существует несколько программных пакетов для моделирования распространения волны в океане и ее наката на берег. Наиболее известными пакетами являются MOST и TUNAMI.

MOST (Method of Splitting Tsunami) [1,2] позволяет используя данные реального времени с цунамометров давать прогноз по месту и области затопления в реальном времени. Этот пакет в основном используется в США для составления карт затопления [3]. Была также создана онлайн версии MOST – comMIT. Пакет TUNAMI N2 был разработан Имамурой в 1993 для программы Tsunami Inundation Modeling Exchange (TIME). Права на этот пакет зарегистрированы за профессорами Имамура, Яльцинером и Синолакисом. TUNAMI N2 успешно применялся для анализа некоторых цунами [4,5]. Далее все обсуждения будут касаться исключительно пакета MOST.

Пакет MOST использует модель расчета распространения волны цунами над глубоководной акваторией при помощи метода расщепления по пространственным переменным. Изначально этот подход был разработан в Лаборатории цунами Вычислительного центра СОАН СССР в Новосибирске. В дальнейшем в Национальном Центре исследования Цунами (NCTR, Сиэтл, США) метод был модернизирован и адаптирован к моделям и стандартам данных, используемым службами предупреждения цунами США и других стран, а также при исследованиях цунами в большинстве стран. MOST используется для численного моделирования всех трех стадий жизни цунами: расчёт поля остаточных смещений в результате землетрясения и генерация волны цунами, распространение волны над глубоководной акваторией океана и взаимодействие с землей (накат и затопление). Для данной работы интерес представляет вторая стадия – движения волны цунами.

Для численного расчета распространения волны цунами используется нелинейная система дифференциальных уравнений мелкой воды в следующем виде [6]:

$$
\begin{aligned}
&H_t + (uH)_x + (vH)_y = 0, \\
&u_t + uu_x + vu_y + gH_x = gD_x, \\
&v_t + uv_x + vv_y + gH_y = gD_y,
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Где H(x, y, t) = (x, y, t) + D(x, y, t), - высота волны, вычисляемая от невозмущенного уровня, D – функция описывающая рельеф дна, u(x, y, t), v(x, y, t) – скорости вдоль x и y соответственно, g – ускорение свободного падения. Приведённая модель мелкой воды хорошо описывает процесс распространения волн цунами в открытом океане при условии, что горизонтальные размеры подвижки океанического дна, генерирующие эту волну, значительно (на порядок) превосходят глубину океана в этом месте.

Запишем систему (1.1) в матричном виде

$$
\frac{\partial z}{\partial t} + A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = F \quad , \tag{1.2}
$$

где

$$
z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ H \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ H & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & u & g \\ 0 & H & u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} gD_x \\ gD_y \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

В качестве области изменения пространственных переменных будем рассматривать прямоугольную область $\Omega = \{x, y : 0 \le x \le X, 0 \le y \le Y\}$ со сторонами параллельными осям координат.

Алгоритм численного решения системы (1.2) строится на основе метода расщепления по пространственным направлениям. Для этого рассмотрим две вспомогательные системы, каждая из которых зависит только от одной пространственной переменной:

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1, \quad 0 \le x \le X \quad ; \tag{1.3}
$$

$$
\frac{\partial \psi}{\partial t} + B\frac{\partial \psi}{\partial y} = F_2, \quad 0 \le y \le Y \quad , \tag{1.4}
$$

где

$$
F_1 = \begin{pmatrix} gD_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ gD_y \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Данный подход впервые предложен в лаборатории моделирования волн цунами Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР (в последствии ИВМиМГ СО РАН).

Для численного решения системы (1.2) достаточно построить устойчивые схемы для систем (1.3) и (1.4). Построим разностную схему для системы (1.3). Уравнения этой системы записываются следующим образам:

$$
\begin{aligned}
v_t + u v_x &= 0,\\
u_t + u u_x + g H_x &= g D_x,\\
H_t + (uH)_x &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Это квазилинейная гиперболическая система. Все собственные числа матрицы А вещественны и различны:

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = u \pm \sqrt{gH}.$$

При численном решении будем использовать запись системы в каноническом виде, что позволяет более точно реализовать граничные условия для конечно-разностного аналога краевой задачи. Канонический вид записывается так:

$$
\begin{aligned}
v'_t + \lambda_1 v'_x &= 0,\\
p_t + \lambda_2 p_x &= g D_x,\\
q_t + \lambda_3 q_x &= g D_x.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

где *v*', *p*, *q* - римановы инварианты системы (1.5) со значениями

$$
\begin{aligned}
v' &= v,\\
p &= u + 2\cdot\sqrt{gH},\\
q &= u - 2\cdot\sqrt{gH}.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Для численного решения системы (1.6) предложена явная разностная схема на четырехточечном шаблоне, которая имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени.

Обычно процесс численного расчета процесса распространения волн цунами от пространственного очага начинается с постановки начальных условий, которые представляют собой поле вертикальных смещений водной поверхности (при суммировании с глубиной это есть толщина слоя воды), и компоненты скорости волнового потока в начальный момент. Как правило, в случае подводных землетрясений, эта скорость мала и ей можно пренебречь, то есть считать, что вода находится в покое, однако выведена из равновесного состояния смещением некоторого участка в вертикальном направлении. Далее на каждом расчётном шаге реализуются лишь граничные условия. На практике, как правило, практическое значение имеет только амплитуда волн. Поэтому, выходными параметрами алгоритма являются значения возвышения водной поверхности во всех узлах расчётной сетки в некоторые заданные моменты времени, а также последовательности значений уровня океана (расчётные мареограммы) в некоторых точках области.

В качестве граничных условий используются следующие: при достижении минимальной глубины (например берега) происходит отражение волны, для границы зоны моделирования (выход за зону моделирования) используется условия прохождения.